Gasiorowicz 3rd edition Jan 25, 2008

P2-8.

Consider a wave function of the form

$$\psi(\mathrm{x}) = \mathrm{Ae}^{-\mu!\mathrm{x}|}$$

Calculate the wave function in momentum space $\phi(\mathrm{p})$.

Solution:

$$\psi(\mathrm{x}) = \mathrm{Ae}^{-\mu!\mathrm{x}|}$$

$$\phi(\mathrm{p}) = \mathrm{p}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}\mathrm{x}}\right)^{-1} \overset{\mathrm{x}}{} \mathrm{x}\,\psi(\mathrm{x})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}\mathrm{x}} \cdot \mathrm{Ae}^{-\mu!\mathrm{x}|}\,\mathrm{dx}$$

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}\mathrm{x}} \cdot \mathrm{Ae}^{\mu\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}\mathrm{x}} \cdot \mathrm{Ae}^{-\mu\,\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\left(\mu-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}\right)\mathrm{x}}\,\mathrm{dx} + \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}+\mu\right)\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}\right]$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{\mathrm{e}^{\left(\mu-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}\right)\mathrm{x}}}{\mu-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{\mathrm{e}^{-\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}+\mu\right)\mathrm{x}}}{-\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}+\mu\right)}\right]_{0}^{\infty}\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2\pi}}\left\{\left[\frac{1}{\mu-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}} - 0\right] + \left[0 - \frac{1}{-\left(\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}+\mu\right)}\right]\right\}$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{\mu-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}} + \frac{1}{\mu+\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{\mu+\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}+\mu-\mathrm{i}\frac{\mathrm{p}}{\hbar}}{\mu^2+\left(\frac{\mathrm{p}}{\hbar}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{A}\hbar^2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{2\mu}{\mu^2+\mathrm{p}^2}\right)$$

$$= \mathrm{A}\hbar^2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{\mu}{\mu^2+\mathrm{p}^2}\right)$$